Hilbertov pogram

Michal Vaľko, valko at sturak . sk, 25. mája 2004
Ústav Informatiky, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava

M-INCU-051: Dejiny logiky, Ladislav Kvasz, letný semester 2003/2004

Abstrakt: *Hilbertov*[1] *program bol pokusom predísť závislosti na iných teóriach a cyklickosti v dôkaze bezospornosti formálnych systémov aritmetiky použitím iba maličkej množiny operácií na dôkaz bezospornosti systému obsahujúceho túto množinu. V druhej fáze mal Hilbertov program za cieľ vybudovať na tomto systéme celú matematiku a tým pádom potvrdiť jej bezospornosť. Všetko úsilie však stroskotalo na Gödelovej druhej vete o neúplnosti.*

Obr. 1 David Hilbert

Úvod

Hilbertova práca na *Základoch matematiky* má svoj pôvod ešte v jeho významnej knihe *Základy geometrie* (1899), kde dospel k názoru, že k serióznej vede sa dá dostať jedine axiomatickým prístupom. Pre takýto prístup je potom vždy dôležité dokázať nezávislosť a bezospornosť daných axióm. Pre axiómy geometrie môže byť bezospornosť ukázaná nájdením interpretácie[2] systému v rovine a tým problém redukujeme na bezospornosť analýzy. Základy analýzy však sami o sebe potrebujú takúto axiomatizáciu a dôkaz bezospornosti. Hilbert toto sám ukazuje v „Über den Zahlbegriff“ ale skoro zisťuje, že i táto sa stretá s ťažkosťami napríklad teórie množín a Russelovým paradoxom. Vidiac, že tieto dôkazy sú púhymi redukciami na inú teóriu, navrhuje urobiť *priamy dôkaz* analýzy. (t.j. bez redukcie). A navrhuje to všetkým matematikom ako druhý z 23 problémov pre dvadsiate storočie na medzinárodnom kongrese matematikov v roku 1900. Sám sa zároveň púšťa do práce a v roku 1905 prezentuje náčrt takéhoto dôkazu.

Intuicionizmus a finitizmus

V dobe keď Hilbert pracoval na svojom programe sa v matematike dostali k slovu intuicionisti. Podľa nich je každý matematický objekt výsledkom konštrukcie v mysli a teda existencia nejakého objektu je ekvivaletná s možnosťou jeho zostrojenia. To je v protiklade s klasickým prístupom v ktorom existenciu objektu možno ukázať popretím jeho *ne*existencie. V tomto kontexte chcel Hilbert nájsť pre svoj program aj filozofickú podporu a zároveň pociťoval potrebu odpovedať aj na kritiku intuicionistov Brouwera a Weyla[3], ktorej ho podrobovali. Hilbertova odpoveď bola finitizmus.

Finitizmus je filozofia v matematike (ktorá je vlastne extrémnou formou konštruktivizmu) podľa ktorej matematické objekty existujú len vtedy ak sa dajú skonštruovať z prirodzených čísel pomocou *konečného* počtu krokov. (Väčšine konštruktivistom totiž stačí spočítateľne veľa krokov.) Najväčší zástanca finitizmu bol Leopold Kronecker, ktorý vyhlasoval: „Boh stvoril celé čísla, všetko ostatné je na človeku.“

---

1 *: 23. 1. 1862 Königsberg, Prusko (teraz Kaliningrad, Rusko)
†: 14. 2. 1943 Göttingen, Nemecko

2 t.j. modelu; Systém formúl je totiž bezosporný, ak má model.

3 Hilbertov bývalý žiak, ktorý prešiel k intuicionistom

Hilbert si totiž na začiatku položil otázku: V čom konkrétnom (ak vôbec v niečom) v reálnom svete nachádza matematik nekonečno?[4] Hilbert hľadal odpoveď v modeli sveta prezentovanom súčasnou fyzikou: Atomická teória vraví, že látka nie je deliteľná donekonečna. Podobne sa kvantová teória vyjadruje o energii. No a teória relativity nám síce tvrdí, že čas a priestor sú neohraničené ale pravdepodobne nie nekonečné. Z týchto výsledkov podľa Hilberta plynie fakt, že pre matematika nemá nekonečno žiadny proťajšok v reálnom fyzikálnom svete.

Najpriek tomuto (pre matematikov nepohodlnému) záveru, sa Hilbert snaží dokázať fakt, že aj matematika s nekonečnami môže byť plnodnotne uznávaná za správnu, ak sa podarí uskutočniť nasledujúce 3 kroky:

Program

1. Prvým krokom je izolovať bezproblémovú „finitnú" časť matematiky. Táto časť je nepostrádateľná pre všetko vedecké usudzovanie a teda nepotrebuje žiadne špeciálne dokazovanie svojej korektnosti. Hilbert však nerozlúskol oriešok[5] definície finitizmu. Avšak hovorí, že finitná matematika sa musí zaobísť bez akýchkoľvek nekonečien. To znamená, že aj bežné logické operácie ako napríklad negácia sa stávajú podozrivými, ak sú aplikované na formuly s kvantifikátormi cez nekonečné domény. Špeciálne je neprípustné vzájomné vnáranie takýchto kvantifikátorov. Napriek týmto obmedzeniam je finitná matematika postačujúca na jednoduché usudzovanie s konečnými postupnosťami symbolov.
2. Druhým krokom je zrekonštruovať „nekonečnú" matematiku na obsiahly formálny systém. Toto je veľký krok, ktorý Hilbert plne popisuje vo svojich Základoch matematiky a obsahuje neohraničenú klasickú logiku, nekonečné množiny ale aj špeciálne premenné, ktoré sú kvantifikovateľné cez prirodzené čísla, ďalej funkcie na prirodzených číslach, spočítateľné ordinály atď. Formuly tohoto veľkého systému sú postupnosti symbolov, ktoré sú podľa Hilberta sami o sebe bezvýznamné, ale dá sa s nimi „finitne" manipulovať.
3. Posledným krokom Hilbertovho programu je dať finitne korektný dôkaz bezospornosti pre tento veľký systém. To by potom dokázalo, že každá veta takéhoto veľkého systému je dokázateľná aj prostriedkami finitnej matematiky. Povedané súčasným jazykom, každá Π_1^0 veta je aj vetou primitívne rekurzívnej aritmetiky. Potom bude celý systém finitne korektný a k nekonečným objektom veľkého systému budú priradené pomocné objekty aby sa použili na dôkaz tvrdení o zmysluplných finitných objektoch.

Problém?

No ten je v bode 3. Povedzme že Hilbertov veľký systém by zahŕňal iba logiku 2. rádu (kvantifikácia cez množiny indivíduí). V bode 3. by sme potom mali ukázať bezospornosť logiky 2. rádu v rámci formálneho systém PRA[6] Dôkaz bodu 3. by potom znamenal, že každá veta logiky 2. rádu je tiež dokázateľná v PRA. Povedané jazykom modernej logiky, by sme ukázali, že logika 2. rádu je *konzervatívnym*[7] rozšírením vzhľadom na Π_1^0 vety. Naneštastie Gödelova

4 Podľa [4] sa takto pohrával s Aristotelým rozdelím na aktuálne a potenciálne nekonečno.

5 To čo sa v súčasnosti považuje za Hilbertovu finitnú matematiku je primitívne rekurzívna aritmetika.

6 primitívne rekurzívna aritmetika

7 rozšírenie formálneho systému nazývame konzervatívnym, ak každá veta rozšírenej teórie je taktiež vetou pôvodnej (rozširovanej) teórie

2.veta o neúplnosti ukazuje, že nie je možné spraviť 3. krok a zavŕšiť tak Hilbertov program. Je totiž množstvo Π_1^0 viet, ktoré sú v logike druhého rádu dokázateľné, ale nie sú dokázateľné v PRA. Príklad takejto vety je aj bezospornosť prvorádovej aritmetiky. Treba samozrejme poznamenať, že Gödelova veta nenapáda bezospornosť formalizácie Hilbertovej nekonečnej aritmetiky. Gödel svojou vetou hovorí „iba“ to, že redukcia matematiky s nekonečnami na finitnú matematiku nie je možná. Vieme teraz aj to, že pre žiadny systém aspoň tak silný ako Peanova aritmetika je nemožné dokázať jeho bezospornosť iba jeho vlastnými prostriedkami. Napriek tomu všetci matematici veria že PA[8] je bezosporná, spoliehajúc sa však iba na vlastnú intuíciu. Ak by sa však zriekli PA, zostal by nám z matematiky malý zlomok aparátu bez možnosti dokázať napr. dôležité vety analýzy. V roku 1936 Gerhard Gentzen ukázal bezospornosť Peanových axióm použitím transfinitnej indukcie. Otázka je, či môžeme „veriť“ formálnemu systému umožňujúcemu takýto typ indukcie, ak nemáme dôkaz jeho bezospornosti. Ak by sme ho však mali, vieme že formálny systém v ktorom by sme to dokazovali bude určite silnejší ako PA ... atď. A tak si ako matematici musíme priznať ako Zlatoš v rovnomennej práci, že ani matematika si nemôže byť istá sama sebou.

Obr. 2 Kurt Gödel

Záver

Napriek Gödelovej rane Hilbertovmu programu v ňom stále existuje zdravé jadro, ktoré ňou nebolo zasiahnuté. Aj tak sa však na istý čas úplne Hilbertovu snahu pochovala. Až neskôr sa objavili snahy využiť formálnu stránku programu. A aj teraz sa objavujú jeho nové interpretácie a vylepšenia.

Literatúra

[1] Panu Raatikainen: Hilbert' sProgram Revisited, Synthese, Volume 137, Issue 1-2, November 2003, Pages 157 – 177

[2] Zach, Richard, "Hilbert' sProgram", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2003 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.),

[3] MacTutor History of Mathematics archive http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history

[4] Simpson, S.G., Partial realizations of Hilbert' sProgram. J. Symbolic Logic 53, pp. 349-363 (1988).

8 Peanova aritmetika