Uzavretosť triedy rekurzívnych jazykov vzhľadom na komplement

Úloha 6.6. *Dokážte, že trieda $\mathcal{L}_{rec}$ je uzavretá vzhľadom na komplement.*

Definícia 1. *Ak sa nejaký jazyk dá rozpoznať Turingovým strojom, ktorý sa zastaví pre každý vstup, potom sa tento jazyk nazýva rekurzívny.*

Existujú však jazyky rozpoznateľné Turingovým strojom, ktorý sa nezastaví pre niektoré vstupné slová nenachádzajúce sa v danom jazyku, a ktoré nie sú rozpoznateľné žiadnym Turingovým strojom, ktorý by sa zastavil pre všetky vstupné slová.

Definícia 2. *Jazyk, ktorý sa dá rozpoznať Turingovým strojom, sa nazýva rekurzívne vyčísliteľný jazyk.*

Definícia 3. *Triedou rekurzívne vyčísliteľných jazykov nazývame množinu $\mathcal{L}_{RE}$ všetkých jazykov, pre ktoré existuje akceptujúci Turingov stroj.*

Definícia 4. *Triedou rekurzívnych jazykov nazývame množinu jazykov $\mathcal{L}_{rec}$, pre ktoré existuje akceptujúci deterministický Turingov stroj, ktorý zastaví (δ-fcia nie je definovaná) na každom vstupe.*

Trieda rekurzívnych množín je vlastnou podmnožinou triedy rekurzívne vyčísliteľných množín. Priamo z definície $\mathcal{L}_{rec}$ plynie, že $\mathcal{L}_{rec}$ je podmnožinou $\mathcal{L}_{RE}$. Jednou z vlastností, ktoré ju od $\mathcal{L}_{RE}$ odlišujú je práve uzavretosť vzhľadom na komplement. Tú vlastnosť aj dokážeme.

Definícia 5. *Problém nazývame turingovsky riešiteľným, ak existuje deterministický Turingov stroj, ktorý zastaví na každom vstupe a ktorý rieši daný problém. (Teda ak vhodne zakódovaný problém je rekurzívny jazyk.)*

Téza 1. *Turingovská riešiteľnosť je ekvivalentná algoritmickej riešiteľnosti.*

Ak prijmeme túto tézu, tak môžeme ukázať, že neexistuje algoritmus, t. j. deterministický Turingov stroj, ktorý zastaví pre všetky vstupné slová, ktorý by určil pre ľubovoľný Turingov stroj T a ľubovoľný vstup x, či sa T so vstupom x niekedy zastaví.

Tento výsledok sa vo veľkej miere využíva pri dôkaze rekurzívnej neriešiteľnosti problémov týkajúcich sa tried jazykov. Teda, že neexistuje algoritmus, ktorý by riešil daný pre každý jazyk z danej triedy.

Lema 1. *Množina Turingových strojov takých, že sa v akceptačnom stave už nehýbu, je normálnym tvarom pre Turingove stroje.*

Veta 1. *$\mathcal{L}_{rec}$ je uzavretá vzhľadom na komplement.*

Dôkaz. Nech L je z $\mathcal{L}_{rec}$. Ukážeme, že aj L^c je z $\mathcal{L}_{rec}$. Keďže L je rekurzívny, $L \subseteq \Sigma^*$, existuje deterministický Turingov stroj T, ktorý zastaví na každom vstupe a rozpoznáva L. Nech teda

$$T = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

Označme jazyk akceptovaný týmto Turingovým strojom:

$$L(T) = L \tag{1}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme z lemy 1. predpokladať normálny tvar Turingovho stroja, ktorý po akceptovaní nevykonáva žiadne ďalšie kroky, teda

$$\delta(p, a) = \emptyset \quad \forall p \in F \quad \forall a \in \Gamma$$

Zostrojíme teraz deterministický T_c taký, že zastaví na každom vstupe a

$$L(T_c) = L^c$$

Definujme T_c takto:

$$T_c := (K_c, \Sigma_c, \Gamma_c, \delta_c, q_{0_c}, F_c),$$

pričom definujeme:

$$\begin{aligned} K_c &:= K \ \cup \{q\} - q \text{ je nový stav} \\ \Sigma_c &:= \Sigma \\ \Gamma_c &:= \Gamma \cup \{\#\} - \# \text{ je nový symbol} \\ q_{0_c} &:= q_0 \\ F_c &:= \{q\} \end{aligned}$$

a δ_c-fcia je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} \delta_c(p, a) &:= \delta(p, a) \quad \forall p \in K \quad \forall a \in \Gamma \\ \delta_c(p, a) &:= \{(q, \#, 0)\} \quad \forall p \in K \backslash F \quad \forall a \in \Gamma : \quad \delta(p, a) = \emptyset \end{aligned}$$

Z definície δ_c-fcie je zrejmé, že T_c je deterministický, lebo δ_c-fcia T_c je kópiou δ-fcie T doplnenou o prechody zo stavov na symboly vtedy, ak je δ-fcia T nedefinovaná.

Prvý riadok definície δ_c-fcie zahŕňa do δ_c-fcie T_c všetky pravidlá stroja T, a teda T_c simuluje T. Okrem toho – v druhom riadku definície – pre každú dvojicu zostavenú z nekoncového stavu a páskového symbolu T, pre ktorú nie je špecifikovaný krok stroja T, stroj T_c prejde do nového stavu q a následne sa zastaví, lebo δ_c-fcia nešpecifikuje pre stav q žiadne pravidlo.

Evidentne T_c zastaví na každom vstupe, lebo simuluje T a prípadne spraví ešte krok do stavu q. Spraví teda maximálne o jeden krok viac ako T. A teda $L(T_c) \in \mathcal{L}_{rec}$.

Ukážeme teraz, že jazyk, ktorý T_c rozpoznáva je práve L^c, čiže

$$L^c = L(T_c) \tag{2}$$

alebo

$$\forall x \in \Sigma^* : \; x \notin L \Leftrightarrow x \in L(T_c)$$

Priamo z definície δ_c-fcie T_c, T_c simuluje T, kým sa T nezastaví. Ak sa T zastaví v jednom zo svojich akceptačných stavov, T_c sa zastaví bez akceptovania, lebo platí

$$F_c \cap F = \emptyset$$

a zároveň

$$\forall p \in F \quad \forall a \in \Gamma : \quad \delta_c(p, a) = \delta(p, a) = \emptyset.$$

Ak sa stroj T zastaví v stave, ktorý nie je koncový, potom T určite neakceptoval a teda podľa definície δ_c-fcie prejde T_c do stavu q, kde zastaví a akceptuje.

Keďže T sa zastavil na každom vstupe, mohol sa zastaviť iba v akceptačnom alebo neakceptačnom (odmietacom) stave. Ukázali sme, že v prvom prípade T_c slovo zamietol, v druhom akceptoval. Z neexistencie iných možností vyplýva platnosť horeuvedenej implikácie.

Platí teda $L(T) = L$ (1) a $L^c = L(T_c)$ (2), z čoho plynie

$$L(T_c) = L(T)^c \tag{3}$$

Ku každému deterministickému Turingovmu stroju T, ktorý zastaví na každom vstupe, teda vieme zostrojiť deterministický Turingov stroj T_c, ktorý taktiež na každom vstupe zastaví a to tak, že platí (3), alebo inak, že T_c akceptuje práve tie slová, ktoré T neakceptuje. V reči jazykov tak $L \in \mathcal{L}_{rec}$ implikuje $L^c \in \mathcal{L}_{rec}$. A teda trieda rekurzívnych jazykov $\mathcal{L}_{rec}$ je uzavretá vzhľadom na komplement.

□